

Chapitre I

Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis.

1-Ensembles ordonnés

1-1- Fonction caractéristique

Définition : soit dans un référentiel X , un sous-ensemble A . On définit la fonction caractéristique de A , notée χ_A l'application définie par :

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}.$$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

1-2- Relation binaire

Définition 1 : la relation binaire T dans un ensemble X est une partie des paires (x, y) des éléments de X , c'est-à-dire $T \subset X^2$.

Et on écrit $x T y$ est équivalente à : $(x, y) \in T$ tel que :

$$T(x, y) = 1 \text{ si } x T y \text{ et } T(x, y) = 0 \text{ si } x \not T y.$$

Définition 2 : Si A et B sont deux ensembles et il y a une propriété spécifique entre x de A et y de B , cette propriété peut représenter par le couple ordonné (x, y) . L'ensemble de tels paires (x, y) , $x \in A$ et $y \in B$ est dit relation T .

1-3- Relation d'ordre[10]

Une relation binaire O sur un ensemble X est un ordre sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Réflexivité : pour tout $x \in X$, $x O x$.
2. Antisymétrie : pour tous $x, y \in X$, $(x O y \text{ et } y O x)$ impliquent $x = y$.
3. Transitivité : pour tous $x, y, z \in X$, $(x O y \text{ et } y O z)$ impliquent $x O z$

L'ordre O est dit total s'il est tel que pour tous $x, y \in X$, $x O y$ ou $y O x$.

1-4- Ensemble ordonné

Un ensemble ordonné est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X . Si O est un ordre total, $P = (X, O)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne).

Exemple

- 1) Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre suivant sur X :
 $O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$.
- 2) L'ensemble des entiers naturels muni de la division est un ensemble ordonné.
- 3) L'ensemble $A = D(m)$ des diviseurs d'un entier $m > 1$, muni de la division est un ensemble ordonné.

Contre exemple

L'ensemble des droites du plan muni de :

La relation « est parallèle à » ou bien la relation « est orthogonale à » n'est pas un ensemble ordonné car : la relation « est parallèle à » n'est pas anti symétrique, et la relation « est orthogonale à » n'est pas transitive.

1-5- Diagramme de Hasse[10]

Le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné $P = (X, \leq)$ est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x

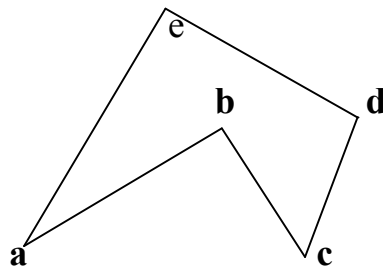
de P sont représentés par des points $P(x)$ du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

- a) Si $x < y$, (l'horizontale passant par) $P(x)$ est au dessous de (l'horizontale passant par) $P(y)$.
- b) $P(x)$ et $P(y)$ sont joints par un segment de droite si et seulement si $x < y$.

Exemple

Le diagramme de Hasse de l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la relation d'ordre

$O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$ est :



Remarque 1

Il existe une infinité des diagrammes possibles du même ensemble ordonné.

1-6- Eléments particulières d'un ensemble[8]

Soit (X, \leq) un ensemble ordonné et $A \subseteq X$.

- 1) On dit que $x \in X$ est un minorant de A si $x \leq a, \forall a \in A$ (l'ensemble des minorants de A , noté par A^L).

- 2) On dit que $x \in X$ est un majorant de A si $a \leq x, \forall a \in A$ (l'ensemble des majorants de A noté par A^U).
- 3) On dit que $m \in A$ est le minimum de A si $m \leq a, \forall a \in A$ ($m = \min$ de A).
- 4) On dit que $M \in A$ est le maximum de A si $a \leq M, \forall a \in A$ (noté $\max(A)$).
- 5) $\text{Sup}(A) = \min(A^U)$.
- 6) $\text{Inf}(A) = \max(A^L)$.
- 7) L'élément maximal : On dit que $x \in A$ est un élément maximal dans A si $\exists a \in A$ tel que $x \leq a \Rightarrow x = a$.
- 8) L'élément minimal : On dit que $x \in A$ est un élément minimal dans A si $\exists a \in A$ tel que $a \leq x \Rightarrow a = x$.

Remarque : Le $\min(A)$ et le $\max(A)$ s'ils existent ils sont uniques.

2-Treillis

2-1- Définition d'un treillis

Définition 1 : Un ensemble ordonné X est un inf-demi-treillis si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$. C'est un sup-demi-treillis si toute paire de ses éléments admet un supremum $x \vee y$. C'est un treillis si toute paire de ses éléments admet un supremum et un infimum donc s'il est à la fois inf-et sup-demi-treillis.

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$.

Définition 2 : Un treillis est un ensemble ordonné (T, \leq) tel que pour tout partie a deux éléments $\{x, y\}$ il existe une borne supérieure notée par $x \vee y$ et une borne inférieure notée par $x \wedge y$.

Exemples

- 1) Toute chaîne C est un treillis tel que : $\forall x, y \in C$:
$$x \vee y = \max(x, y)$$
$$x \wedge y = \min(x, y).$$

2) $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, muni de la division est un treillis tel que :

$$x \vee y = \text{ppmc}(x, y).$$

$$x \wedge y = \text{pgcd}(x, y).$$

3) L'ensemble $(2^X, \subseteq)$ muni de l'union et l'intersection est un treillis son lois définis par : $\forall X, Y \in 2^X : X \vee Y = X \cup Y$.

$$X \wedge Y = X \cap Y$$

Propriétés

Dans un treillis quelconque on a :

- $X \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y.$

$$\Leftrightarrow y = x \vee y.$$

- Idempotence : $x \wedge x = x \vee x = x.$
- Commutativité : $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x.$
- Associativité : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$
 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$
- Les lois d'absorptions : $x \wedge (y \vee x) = x.$
 $x \vee (y \wedge x) = x.$

Théorème 1[1]

Soit T un ensemble muni de deux lois internes \wedge, \vee et qui sont : idempotentes, commutatives, associatives, et qui vérifient les lois d'absorptions, alors il existe une relation unique d'ordre (\leq) sur T tel que :

T soit un treillis avec : $x \wedge y = \inf(x, y).$

$$x \vee y = \sup(x, y).$$

2-2- Treillis fermés

Définition : Un treillis T est dit fermé s'il possède un plus petit élément noté «0» et un plus grand élément noté «1».

Exemples

1. L'ensemble des parties d'un ensemble E , $P(E)$ muni de la relation d'inclusion est un treillis fermé, le plus petit élément est \emptyset , et le plus grand élément est E .
2. L'ensemble des diviseurs de 6 : $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis fermé tel que : le minimum est 1, et le maximum est 6.
3. $(\mathbb{N}^*, /)$ n'est pas un treillis fermé car il ne possède pas un plus grand élément.

2-3-Filtre dans un treillis

Définition 1 :

Soit T un treillis. On appelle filtre dans le treillis T , toute partie non vide F de T vérifiant les deux conditions suivantes :

- ✓ $x \in F, y \geq x \Rightarrow y \in F$.
- ✓ $x \in F$, et $y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$.

Exemple

Dans l'ensemble $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ on a :

$F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$, $F_2 = \{30\}$, $F_3 = \{6, 30\}$ Sont des filtres.

Remarque 2

- 1) Un filtre F est dit propre si $F \neq T$.
- 2) F propre si et seulement si $0 \notin F$.
- 3) Soit «1» le plus grand élément de T , alors $\{1\}$ est le plus petit filtre de T .
- 4) Toute intersection des filtres est un filtre.

Définition 2

Soit G une partie non vide de T . Le filtre engendré par G noté F_G est l'intersection de tous les filtres qui contiennent G c'est-à-dire c'est le plus petit filtre qui contient G .

On définit F_G comme suite :

F_G est l'ensemble des $x \in T$, tel que il existe un nombre fini $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ d'éléments de G avec : $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n$ et on écrit :

$$F_G = \{x \in T / x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \dots \wedge a_n, a_i \in G\}.$$

Si $G = \emptyset$, alors $F_G = \{1\}$.

Exemple

On a le treillis $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ on prend $G = \{10\} \neq \emptyset$

Dans ce cas le filtre engendré par G est :

$$F_G = \{10, 30\}.$$

Définition 3

On appelle filtre principale c'est le filtre engendré par un seul élément, il est défini par : $F_a = \{x \in T / x \geq a\}$.

Exemple

On a le treillis $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$.

On prend $a = 2$ donc le filtre principale engendré par 2 est :

$$F_2 = \{2, 6\}.$$

Définition 4

Par définition, les ultrafiltres sont les filtres propres maximaux pour l'ordre (les filtres propres qui ne sont contenus dans aucun autre filtre propre).

Exemple

Dans $D(30)$ les ultrafiltres sont :

$$F_2 = \{x \in D(30) / x \geq 2\} = \{2, 6, 10, 30\}.$$

$$F_3 = \{x \in D(30) / x \geq 3\} = \{3, 6, 15, 30\}.$$

$$F_5 = \{x \in D(30) / x \geq 5\} = \{5, 10, 15, 30\}.$$

Proposition 1

Soit F un filtre propre les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- F est un ultrafiltre.
- $\forall x \in T, x \notin F \Rightarrow$ il existe $y \in F$ tel que : $x \wedge y = 0$.

2-4- Idéal dans un treillis

Définition 1 :

On appelle idéal toutes parties non vide I de E tel que :

- $x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I$.
- $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.

On dit que I propre si et seulement si $1 \notin I$.

$\{0\}$ est un idéal c'est le plus petit idéal.

Définition 2 :

Soit G une partie non vide de E . L'idéal engendré par G noté par I_G est définie par :

$$I_G = \{ x \in E / x \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n, a_i \in G \}.$$

Définition 3 :

G partie \vee -compatible si $I_G \neq E$.

G partie \vee -incompatible $\Leftrightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_n$ de G tel que : $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$.

L'ensemble des idéaux propres est inductif, il admet donc des éléments maximaux (idéal maximal).

2-5- Treillis distributif

Définition :

Soit T un treillis, on dit que T est distributif si tout triplet (x, y, z) de T vérifie l'un de deux conditions :

$$1/ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

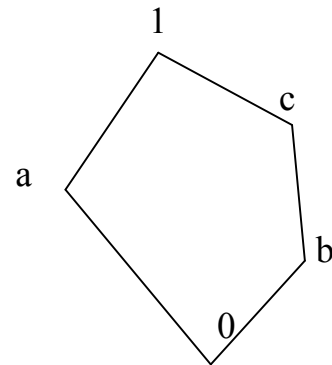
$$2/ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Exemples

- Toute chaîne est un treillis distributif :

$$\text{Min}(x, \max(y, z)) = \max(\text{min}(x, y), \text{min}(x, z)).$$

- $(P(E), \subseteq)$ est un treillis distributif.
- L'ensemble défini par :



N'est pas un treillis distributif car :

$$\text{On a : } c \wedge (a \vee b) = c \wedge 1 = c.$$

$$(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee b = b.$$

Théorème 2[8]

T est un treillis distributif si et seulement si il vérifié l'un des trois conditions suivantes :

- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$
- $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$
- $[x \wedge y = x \wedge z \text{ et } x \vee y = x \vee z] \Rightarrow (y=z).$

2-6- Treillis complémenté

Définition : Soit T un treillis

On dit que T est complémenté si tout $x \in T$ admet au moins un complément, c'est-à-dire un élément $x' \in T$ vérifiant $x \wedge x' = 0$ et

$$x \vee x' = 1.$$

Exemple

1) $(P(E), \subseteq)$ est complémenté

$$A \cap \complement A = \emptyset, A \cup \complement A = E.$$

2) $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ est complémenté :

$$2' = 15, 15' = 2, 3' = 10, 10' = 3, 5' = 6, 6' = 5, 1' = 30, 30' = 1.$$

Remarque 2

La distributivité d'un treillis conserve l'unicité de complément s'il existe.

2-7- Treillis de Boole

Définition [5] :

Par définition le treillis de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Exemples

- La chaîne $u = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.
- $(P(E), \subseteq)$ est un treillis de Boole.
- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls muni de la division n'est pas un treillis de Boole (n'a pas un plus grand élément).

Théorème 3[1] : Soit B une algèbre de Boole et F un filtre propre, il ya équivalence entre :

- ✓ F est un ultrafiltre.
- ✓ $\forall x \in B, x \in F$ ou $\neg x \in F$.

Théorème 4[1]

Soit F une partie non vide d'une algèbre de Boole.

Pour que F soit un ultrafiltre il faut et suffit qu'elle vérifie :

- ✓ $x \in F \Leftrightarrow \neg x \notin F$
- ✓ $x, y \in F \Leftrightarrow x \wedge y \in F$.

Théorème 5

Soit F une partie non vide de B (algèbre de Boole) pour que F soit un ultrafiltre il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit χ soit un morphisme booléen de B dans $u = \{0, 1\}$.

$$\chi : B \rightarrow u \begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in F; \\ \chi(x) = 0 \text{ si } x \notin F. \end{cases}$$

Théorème 6 [1] : (Théorème de représentation de stone)

Toute algèbre booléenne B est isomorphe à une sous algèbre booléenne de la forme $P(X)$ telle que :

X est l'ensemble des ultrafiltres de B .